SYSTEMES LINEAIRES DU SECOND ORDRE

1. DEFINITION

e(t) — SYSTEME — s(t)

Un système est dit **linéaire invariant du second ordre** si la réponse **s(t)** est **liée** à l'excitation **e(t) par** une **équation différentielle linéaire à coefficients constants du second ordre** :

$$\frac{1}{\omega_0^2}\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{2m}{\omega_0}\frac{ds}{dt}+s(t)=A_0.e(t)$$

ω_0 : pulsation propre du système
m : coefficient d'amortissement

2. REPONSE INDICIELLE

Pour $t < 0$, $e(t) = 0$
Pour $t \geq 0$, $e(t) = E$
L'équation différentielle ci-dessus admet pour solution s(t) la somme de deux termes $s_1(t)$ et $s_2(t)$ qui sont respectivement la solution générale de l'équation sans second membre et une solution particulière avec second membre :

2.1 Solution générale de l'équation sans second membre

Equation caractéristique

$$r^2+2m\omega_0 r+\omega_0^2=0$$

$$\Delta'=(m^2-1).\omega_0^2$$

- **m > 1 : 2 racines réelles :**

$$r_1=\omega_0.(-m-\sqrt{m^2-1})$$

$$r_2=\omega_0.(-m+\sqrt{m^2-1})$$

le régime est apériodique :

$$s_1(t)=A_1.e^{r_1 t}+A_2.e^{r_2 t}$$

- **m = 1 : 1 racine double :**

$$r_0=-\omega_0$$

le régime est critique :

$$s_1(t)=(A+B.t).e^{r_0 t}$$

- **m < 1 : 2 racines complexes conjuguées :**

$$r_1=\omega_0.(-m-j\sqrt{1-m^2})$$

$$r_2=\omega_0.(-m+j\sqrt{1-m^2})$$

le régime est oscillatoire amorti :

$$s_1(t)=A_3.e^{-m\omega_0 t}.\cos(\omega t+\varphi)$$

ω : pseudo pulsation

$$\omega=\omega_0.\sqrt{1-m^2}$$

Ces solutions correspondent au régime transitoire.

2.2 Solution particulière avec second membre

La solution est évidente :

$$s_2(t) = A_0.E$$

Elle correspond au régime permanent.

2.3 Solution globale

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t)$$

Les différentes constantes sont déterminées à partir de la connaissance des valeurs de s(t) et de sa dérivée à l'instant t = 0^-.

Dans le cas où ces valeurs sont nulles :

- si m > 1 :

$$A_1 = +A_0E\frac{m-\sqrt{m^2-1}}{2\sqrt{m^2-1}}$$

$$A_2 = -A_0E\frac{m+\sqrt{m^2-1}}{2\sqrt{m^2-1}}$$

- si m = 1 :

$$A = -A_0E$$

$$B = -A_0E\omega_0$$

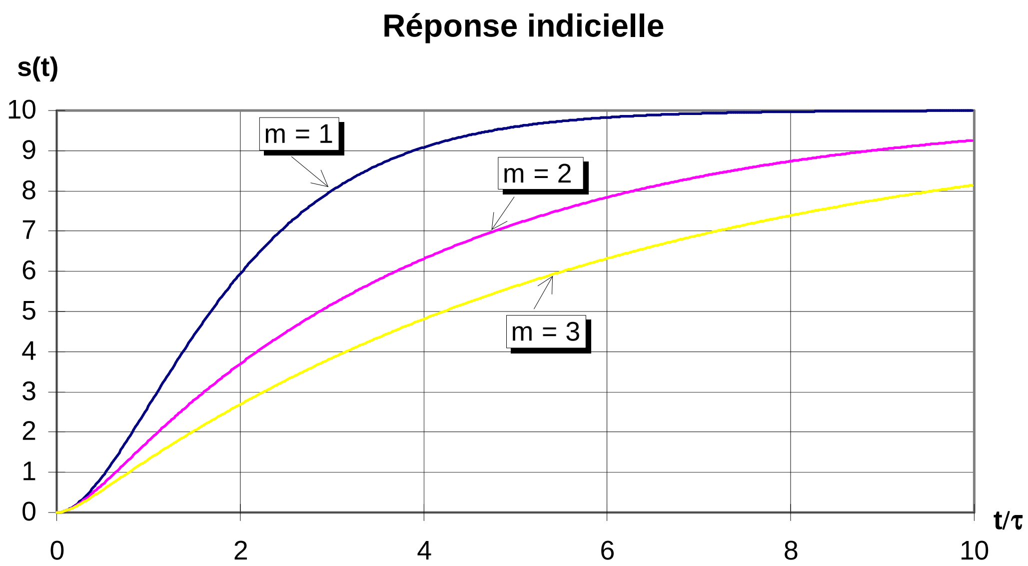
- si m < 1

$$\tan\varphi = \frac{-m}{\sqrt{1-m^2}}$$

$$A_3 = \frac{-A_0E}{\cos\varphi} = \frac{-A_0E}{\sqrt{1-m^2}}$$

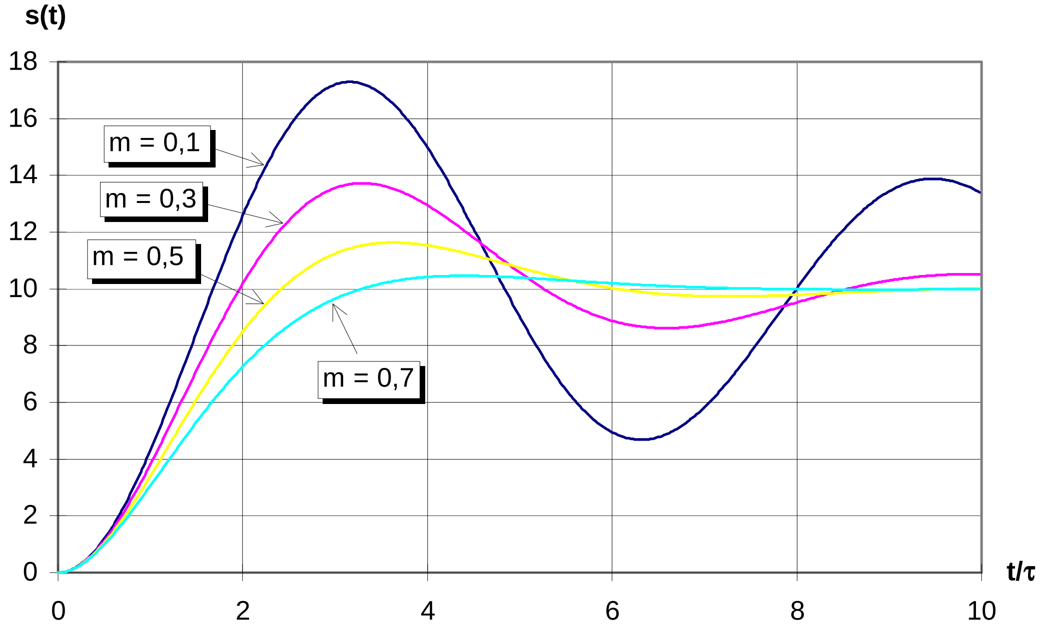
2.4 Représentation

Avec les conditions initiales ci-dessus, on obtient :



Pour m ≥ 1, on remarque que les temps de montée et de réponse augmentent avec m.

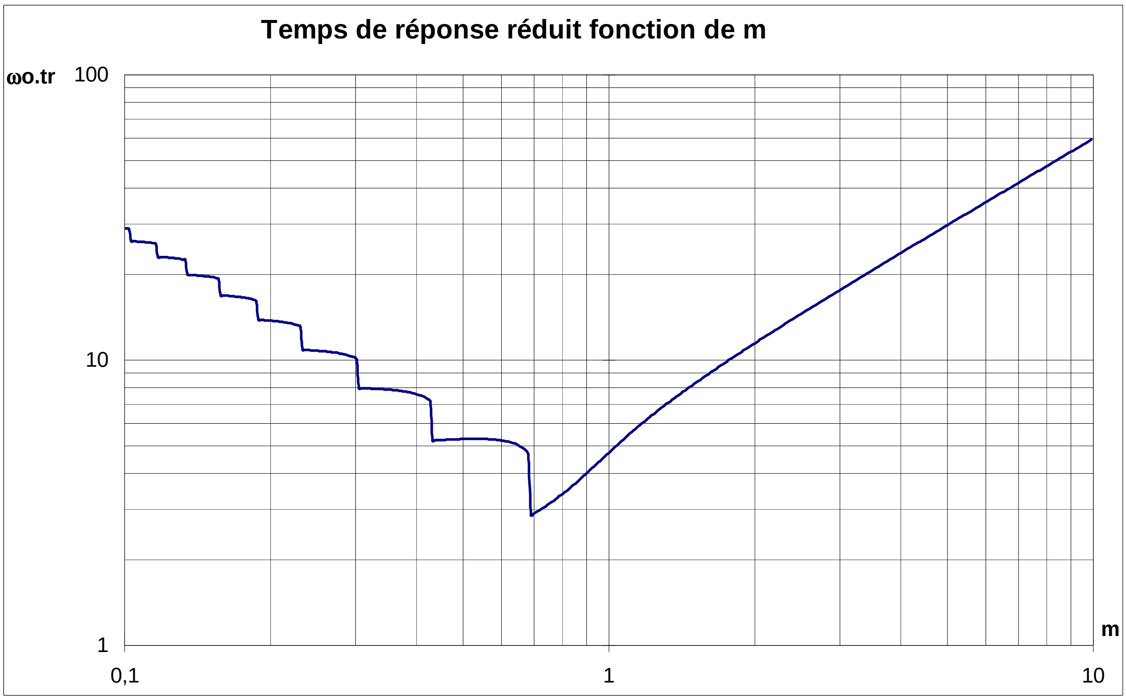
Réponse indicielle pour m < 1



Pour les valeurs faibles de m (m < 0,7), le temps de réponse augmente lorsque m diminue car l'amplitude des oscillations augmente et le régime transitoire est de plus en plus long.

2.5 Temps de réponse à 5%

On peut remarquer que le temps de réponse est minimum pour m ≈ 0,7 , car c'est au delà de cette valeur que le premier dépassement est inférieur à 5%.



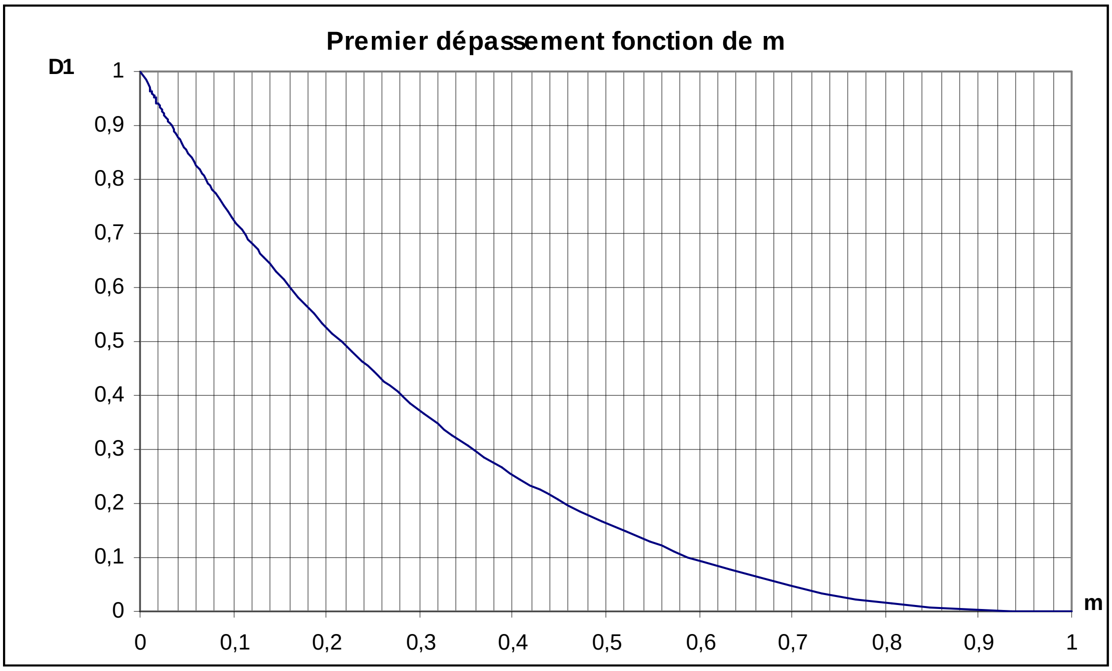
On peut montrer ou remarquer sur la courbe ci-dessus que :

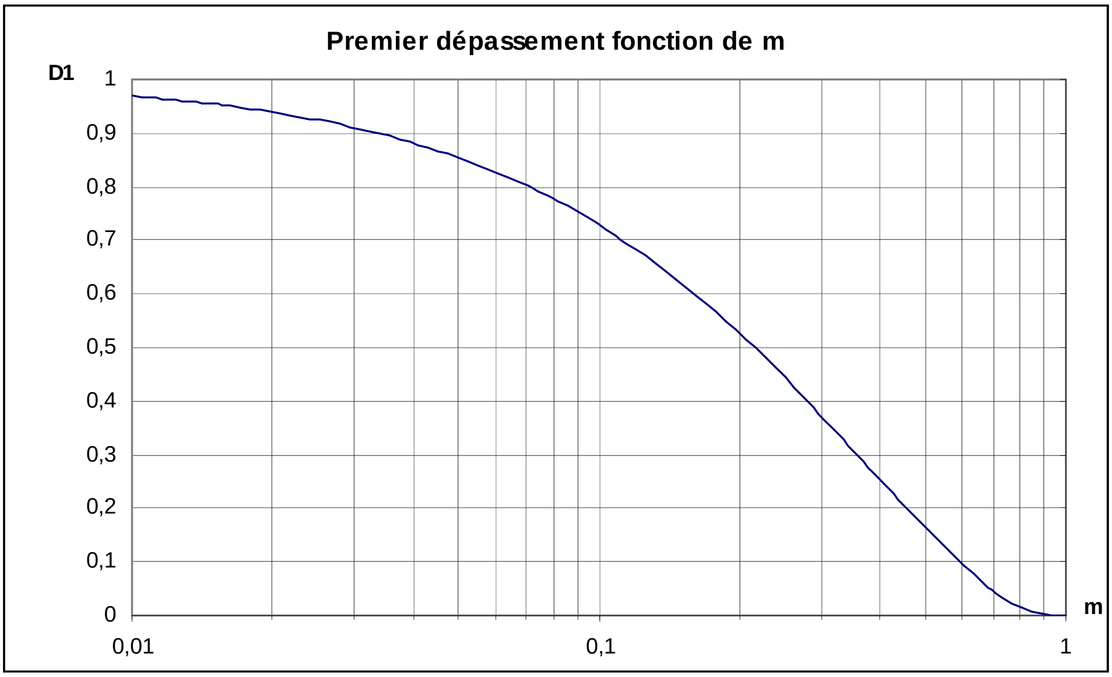
- si m >> 1 : $\omega_0.t_r = 6m$
- si m << 1 : $\omega_0.t_r = 3/m$

2.6 Dépassement

Lorsque m < 1, s(t) parvient à sa valeur finale après un ou plusieurs dépassements.
La dérivée de s(t) s'annule lorsque s(t) passe par des extremums.
Avec les conditions initiales précédentes on obtient :
$\tan(\omega t+\varphi) = -m\omega_0 /\omega = \tan(\varphi)$ soit $\omega t = k\pi$ ou encore $t = kT/2$

Le **premier dépassement** aura donc pour valeur : $\boxed{D_1 = \frac{s(T/2)-s(\infty)}{s(\infty)} = \frac{s_1(T/2)}{A_0 E} = e^{\frac{-m\pi}{\sqrt{1-m^2}}}}$





On définit le logarithme du rapport de deux dépassements successifs de même sens :

$$\boxed{\delta = \mathrm{Ln}\frac{s_1(kT/2)}{s_1(kT/2+T)} = \frac{2m\pi}{\sqrt{1-m^2}}}$$

δ est appelé **décrément logarithmique**

3. REPONSE HARMONIQUE

3.1 Fonction de transfert

L'excitation e(t) est alors sinusoïdale : e(t) = E.sin(ωt)
En passant à la notation complexe et en supposant A_0 positif, on obtient :

$$\underline{T} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{A_0}{1 - \omega^2/\omega_0^2 + 2jm\omega/\omega_0}$$

qui a pour module :

$$\left|\underline{T}\right| = \frac{A_0}{\sqrt{(1 - \omega^2/\omega_0^2)^2 + (2m\omega/\omega_0)^2}}$$

et pour argument :

$$\varphi = \text{-arctan}\left(\frac{2m\omega/\omega_0}{1 - \omega^2/\omega_0^2}\right)$$

3.2 Diagrammes de Bode et de Nyquist

On doit considérer trois cas : m > 1, m = 1 et m < 1.

3.2.1 m > 1

On peut mettre $\underline{T}$ sous la forme :

$$\underline{T} = \frac{A_0}{(1 + j\omega/\omega_1).(1 + j\omega/\omega_2)}$$

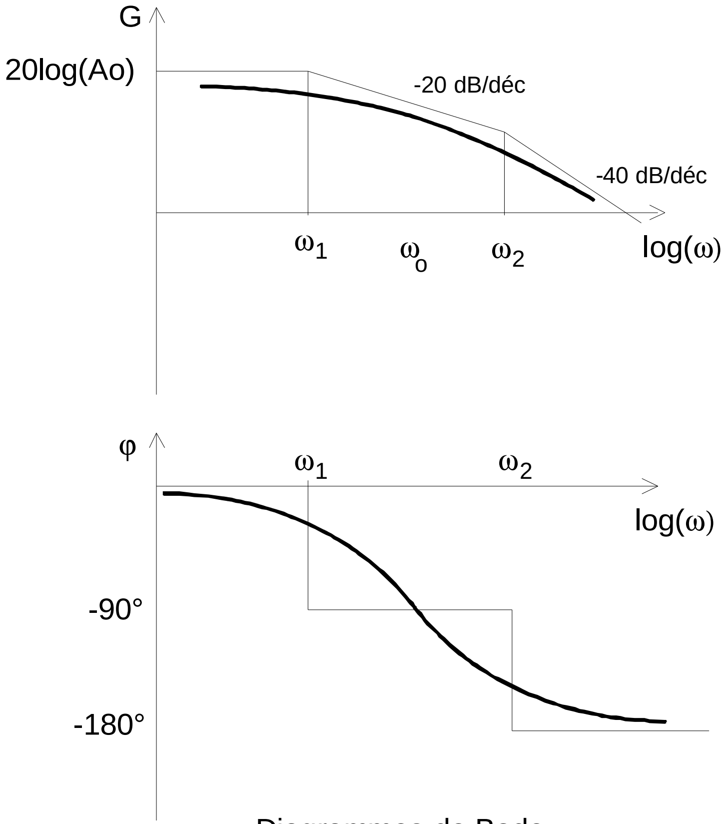
avec : $\omega_1 = \omega_0(m - \sqrt{m^2 - 1})$

$$\omega_2 = \omega_0(m + \sqrt{m^2 - 1})$$

Puisque $\omega_0^2 = \omega_1.\omega_2$, la pulsation ω_0 se trouve au milieu des deux autres sur une échelle logarithmique car : $\log(\omega_0^2) = \log(\omega_1.\omega_2)$ donc :

$$\frac{1}{2}\log\omega_0 = \log\omega_1 + \log\omega_2 \Rightarrow \log\omega_0 = \frac{\log\omega_1 + \log\omega_2}{2}$$

On obtient les diagrammes de Bode et de Nyquist ci-dessous :



Diagrammes de Bode

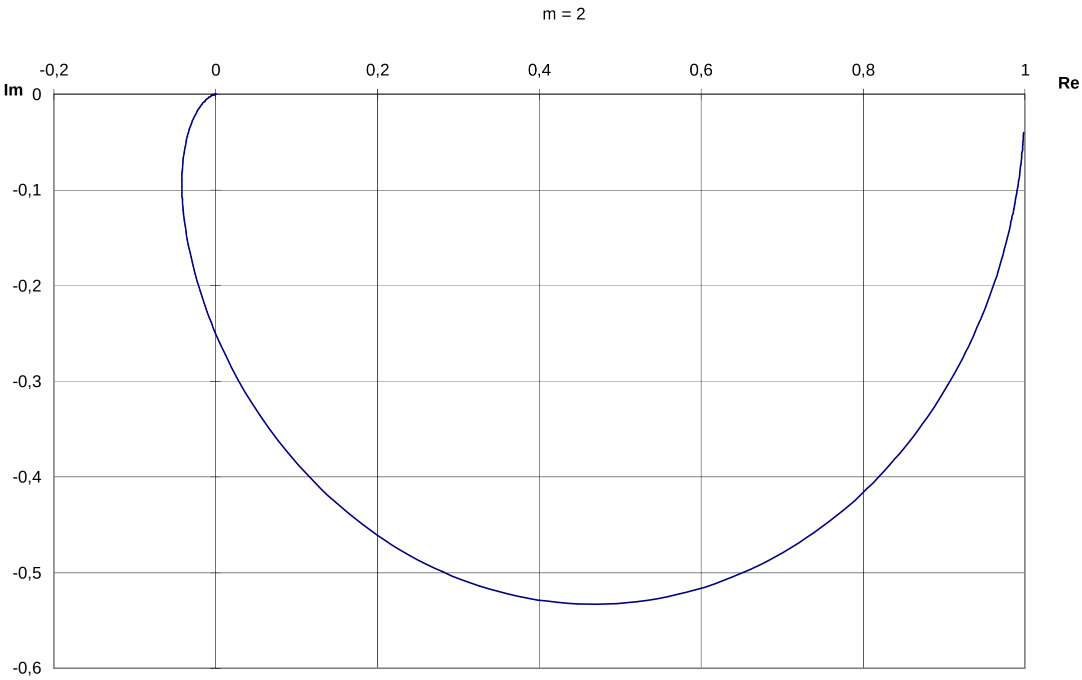


Diagramme de Nyquist pour m = 2

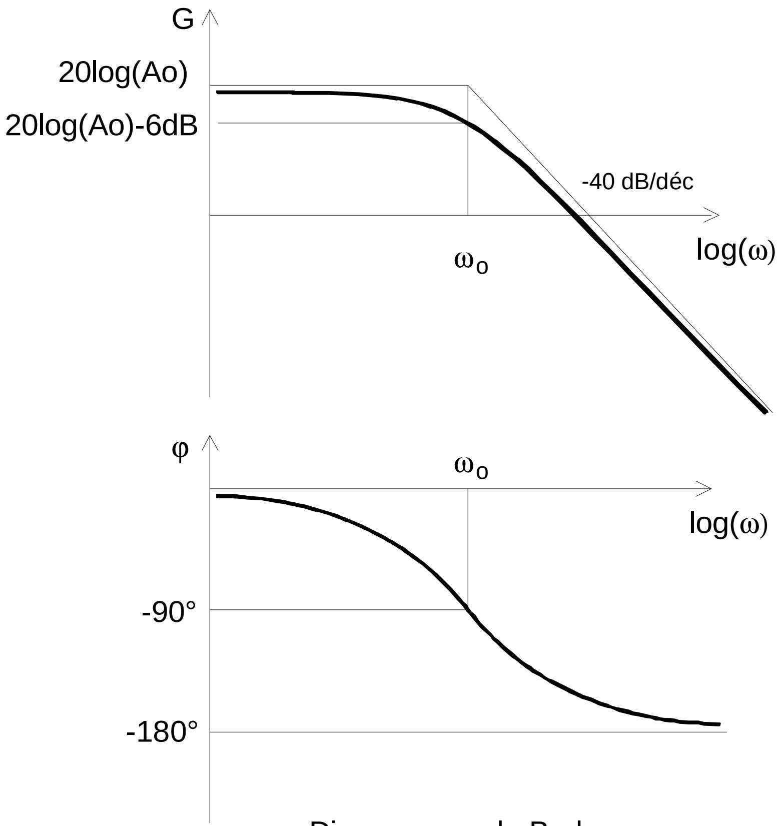
3.2.2 m = 1

Il n'existe alors qu'une pulsation ω_0 qui est également la pulsation de coupure à - 6dB.
En effet dans ce cas :

$$\underline{T} = \frac{A_0}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \quad \text{et} \quad \left|\underline{T}(\omega)\right| = \frac{A_0}{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

donc :

$$\left|\underline{T}(\omega_0)\right| = \frac{A_0}{2} \quad \text{et} \quad G = 20\log\frac{A_0}{2} = 20\log A_0 - 6\text{dB}$$



Diagrammes de Bode

3.2.3 m < 1

Les racines sont complexes :

$$\omega_1 = \omega_0 (m - j\sqrt{1 - m^2})$$

$$\omega_2 = \omega_0 (m + j\sqrt{1 - m^2})$$

Montrons que la réponse présente une surtension :
la dérivée par rapport à la pulsation du module de $\underline{T}$ s'annule pour :

$$\omega = \omega_R = \omega_0 \sqrt{1 - 2m^2}$$

la résonance n'existe donc que si m < $1/\sqrt{2}$

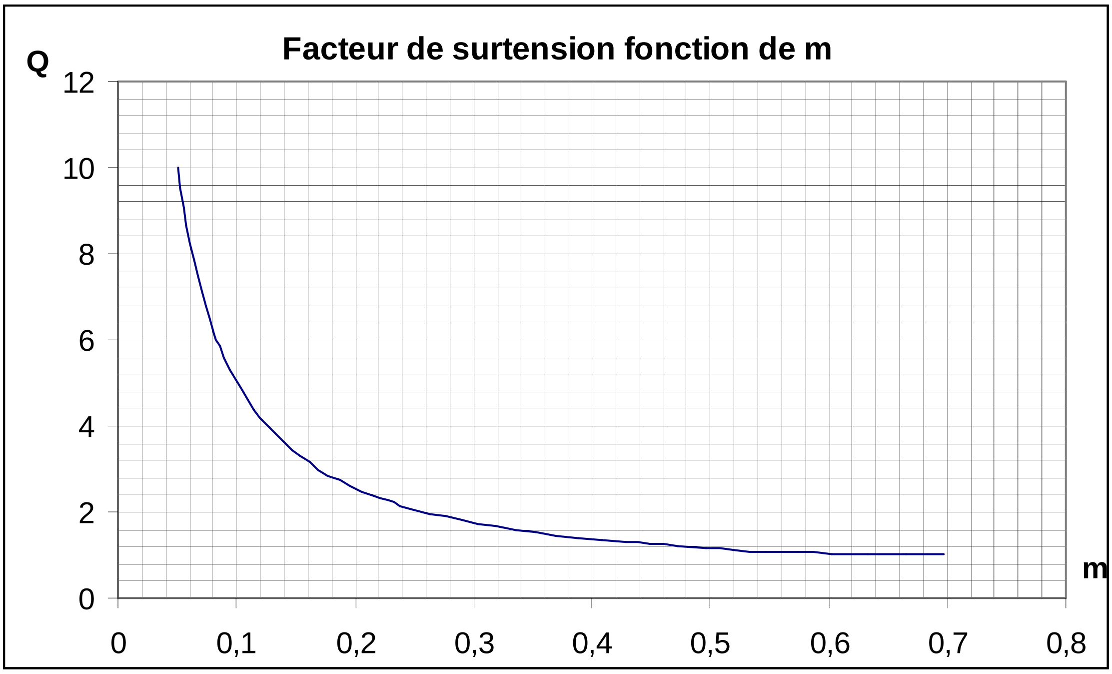
ω_R est la **pulsation de résonance**. A cette pulsation, le module de $\underline{T}$ est maximum et vaut :

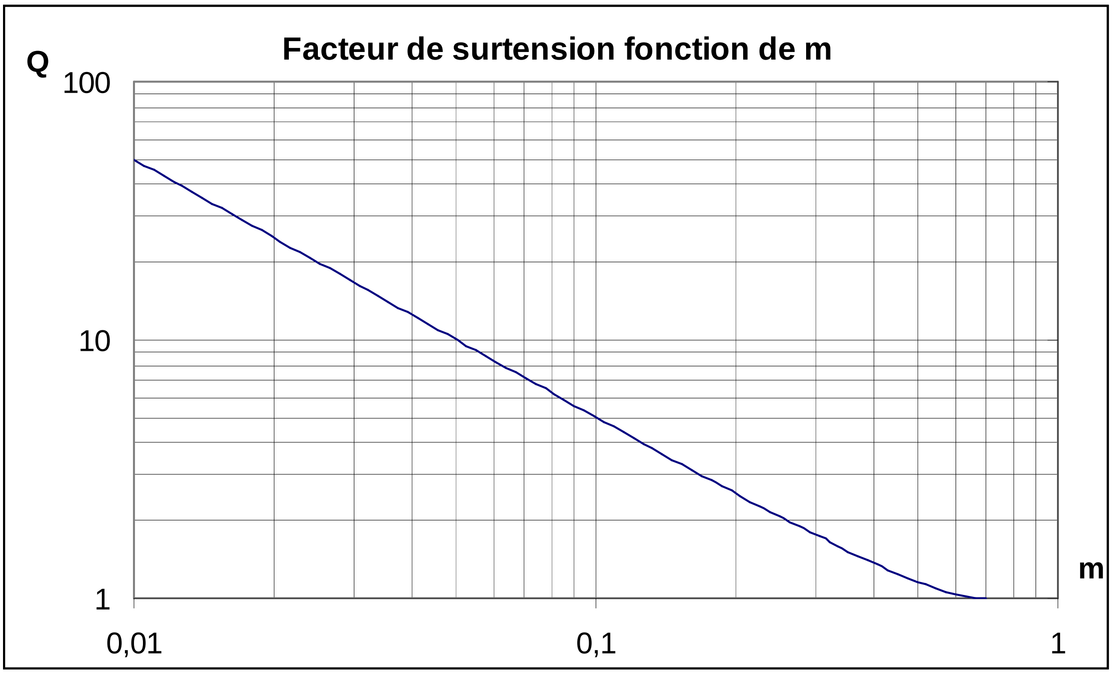
$$\left|\underline{T}(\omega_R)\right| = T_{Max} = \frac{A_0}{2m\sqrt{1 - m^2}}$$

Le **facteur de surtension** est défini par :

$$Q = \frac{\left|\underline{T}(\omega_R)\right|}{\left|\underline{T}(0)\right|} = \frac{1}{2m\sqrt{1-m^2}}$$

Si $m = 1/\sqrt{2}$, la courbe est dite maximalement plate et la pulsation de coupure à - 3dB est égale à la pulsation propre ω_0 du système.





Dans le cas général, la fréquence de coupure à - 3dB dépend de la pulsation propre et du coefficient d'amortissement du système.

$$|\underline{T}| = \frac{A_0}{\sqrt{(1-\omega^2/\omega_0^2)^2 + (2m\omega/\omega_0)^2}} = \frac{A_0}{\sqrt{2}}$$

En posant $x = \omega/\omega_0$, on résout :

$$\left(1-x^2\right)^2 + \left(2.m.x\right)^2 = 2$$

$$x^4 + 2.\left(2.m^2 - 1\right).x^2 - 1 = 0$$ équation bicarrée

Posons $X = x^2$:

$$X^2 + 2.\left(2.m^2 - 1\right).X - 1 = 0$$

Calculons le discriminant réduit :

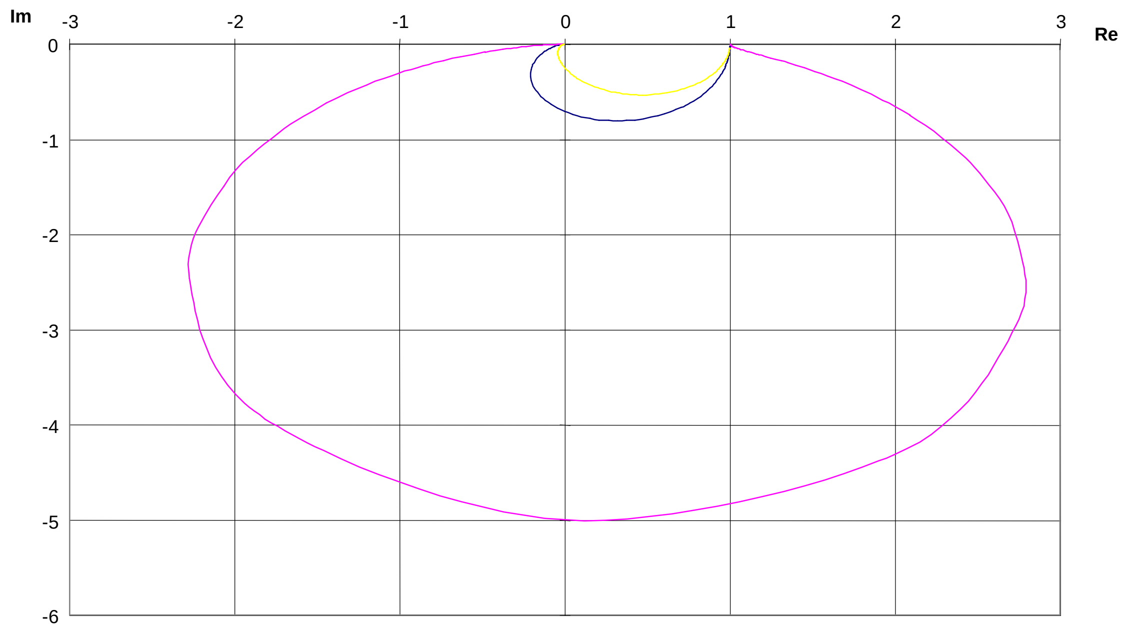
$$\Delta' = \left(2.m^2 - 1\right)^2 + 1$$

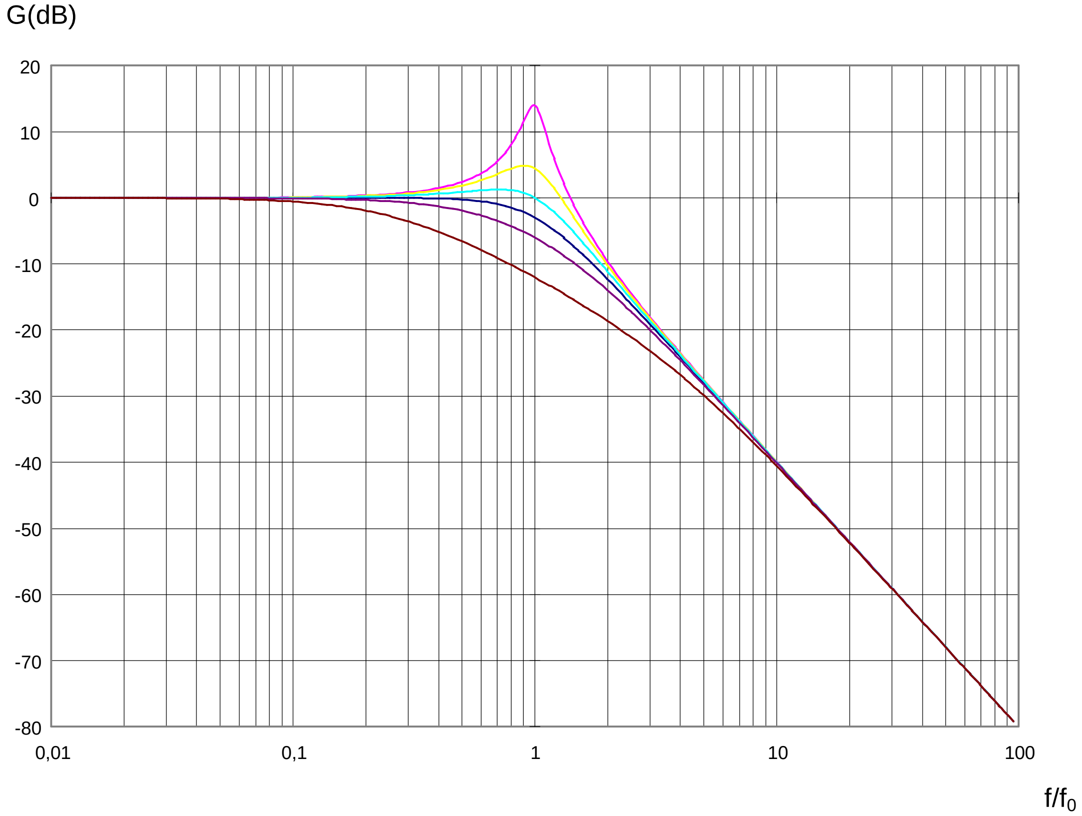
$$X = -\left(2.m^2 - 1\right) \pm \sqrt{\left(2.m^2 - 1\right)^2 + 1}$$

Une seule solution est positive, c'est celle-ci que nous retiendrons, donc :

$$\boxed{\omega_c = \omega_0 \sqrt{\sqrt{\left(2.m^2 - 1\right)^2 + 1} - \left(2.m^2 - 1\right)}}$$

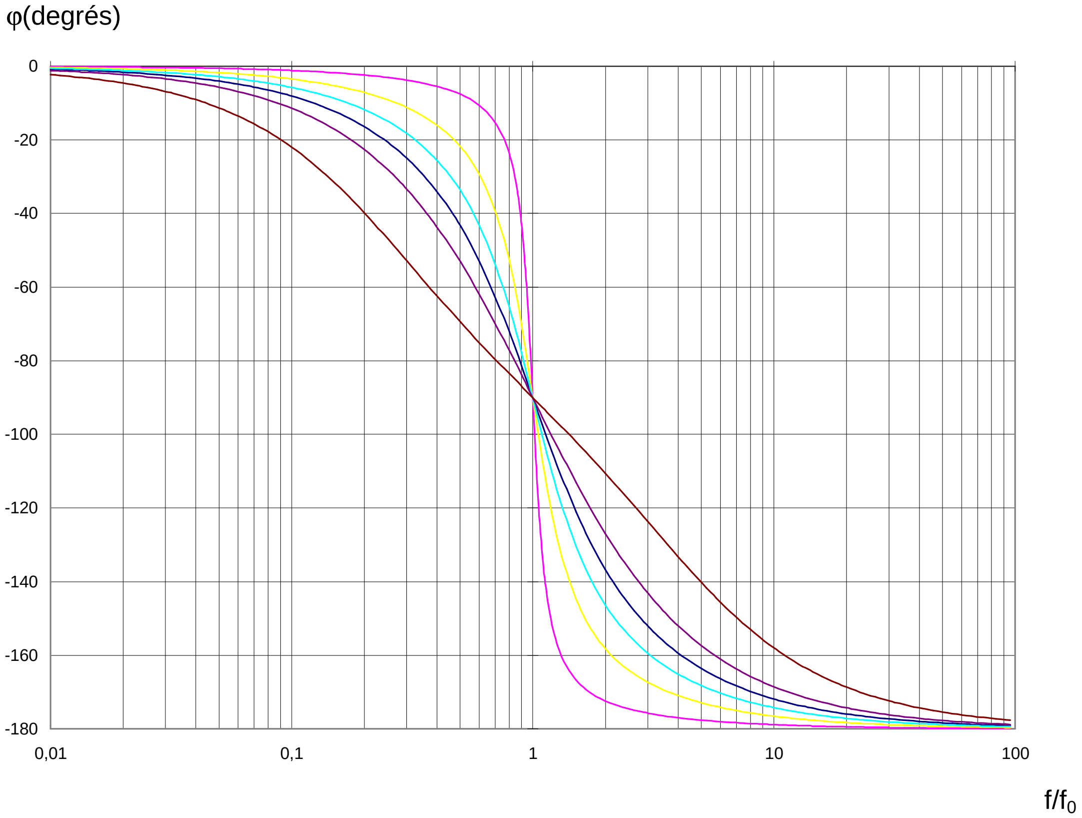
Diagramme de Nyquist pour m = 0,1   0,7 et 2





Les courbes de gain et d'argument sont tracées pour :
m = 0,1 m = 0,3 m = 0,5 m = 0,7 m = 1 m = 2

Lorsque m diminue, la surtension augmente et la variation de phase est plus rapide au voisinage de $\omega = \omega_0$.



Serge MONNIN Système du second ordre