SYSTEMES LINEAIRES DU PREMIER ORDRE

1. DEFINITION

e(t) — SYSTEME — s(t)

Un système est dit **linéaire invariant du premier ordre** si la réponse **s(t)** est **liée à** l'excitation **e(t) par** une **équation différentielle linéaire à coefficients constants du premier ordre** :

$$\boxed{\tau\frac{ds}{dt}+s=A_0.e \qquad \text{où } \tau \text{ et } A_0 \text{ sont des constantes}}$$

τ : constante de temps

A_0 : coefficient d'amplification statique

2. REPONSE INDICIELLE

La réponse indicielle est la réponse à un échelon défini ainsi :

- pour t < 0, e(t) = 0
- pour t ≥ 0, e(t) = E

2.1 Solution de l'équation différentielle

L'équation différentielle du premier ordre admet pour solution s(t) la somme de deux termes s_1 et s_2 qui sont respectivement la solution générale de l'équation sans second membre et une solution particulière avec second membre :

$$s_1(t)=k.e^{-t/\tau}$$

$$s_2(t)=A_0.E$$

$$s(t)=s_1(t)+s_2(t)=A_0.E+k.e^{-t/\tau}$$

La constante d'intégration k dépend des conditions initiales, c'est à dire de l'état du système au moment où on lui applique l'échelon. Pour la déterminer, on reporte dans l'équation précédente la valeur de $s(t)$ à l'instant $t = 0^-$.

Soit $s(0^-)=S_0$ donc $S_0=A_0.E+k$ et $k = S_0 - A_0$

La solution de l'équation différentielle s'écrit donc :

$$\boxed{s(t)=A_0.E+(S_0-A_0.E).e^{-t/\tau}}$$

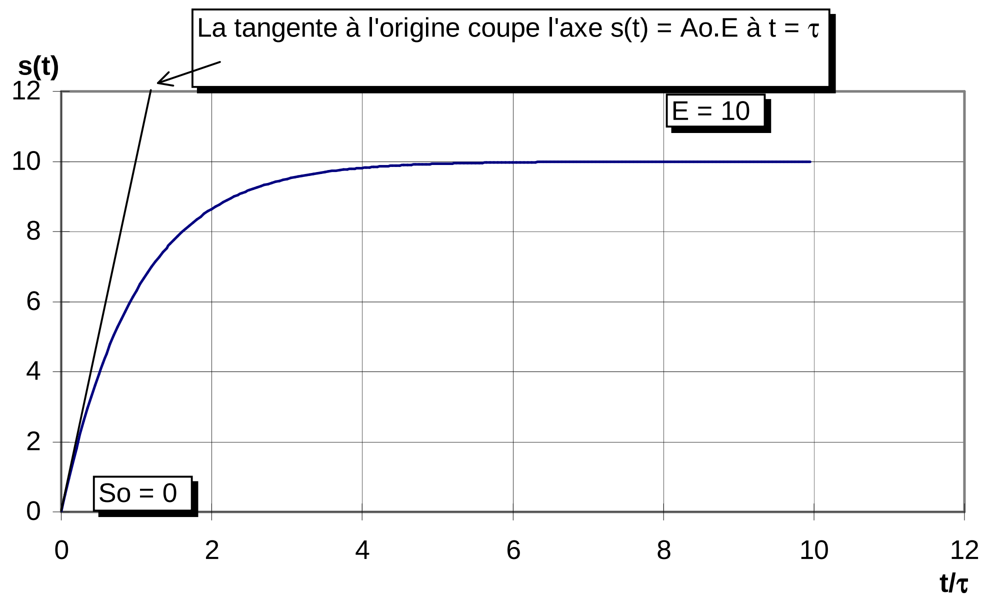
Suivant que la valeur initiale S_0 de s est nulle, inférieure à $A_0.E$ ou supérieure à $A_0.E$, nous obtiendrons différents types de réponse représentés ci-dessous pour $A_0.E = 10$.

2.2 Pente à l'origine

Le développement limité à l'origine de l'exponentielle nous donne l'expression de s(t) au voisinage de zéro qui est l'équation de la tangente à l'origine :

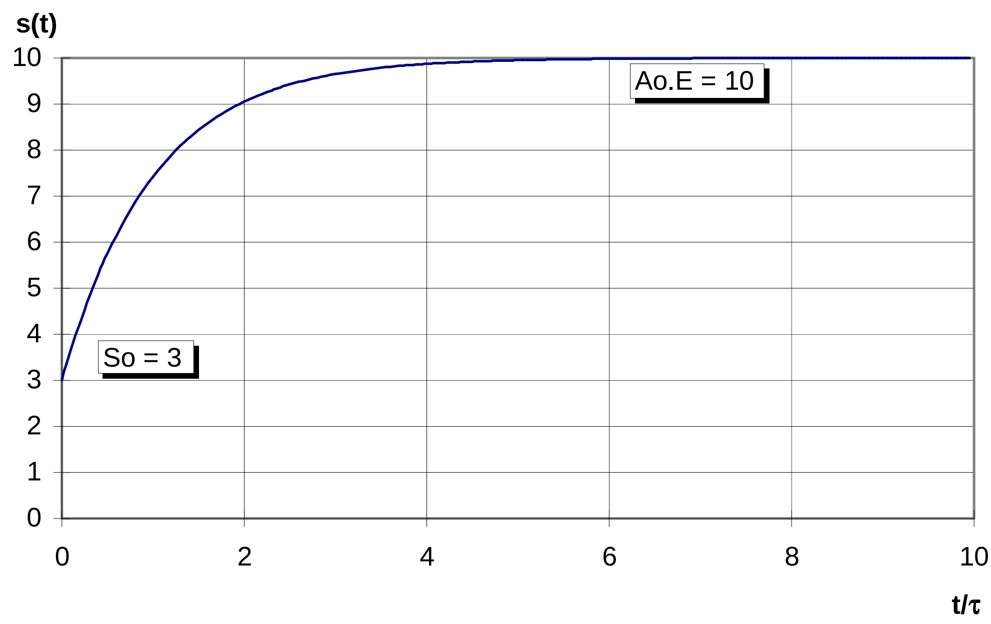
$$A_0.E+(S_0-A_0.E).(1-t/\tau)$$

elle coupe la droite d'équation y(t) $= A_0.E$ à l'instant $t = \tau$.



Les courbes de réponse sont tracées en fonction de l'abscisse réduite t/τ.
Pour déterminer la constante de temps d'un système du premier ordre, on peut tracer la tangente à l'origine de sa courbe de réponse et déterminer l'instant où cette droite coupe celle d'équation :
$y(t) = A_0.E$, mais cette méthode est imprécise car liée à la pente que l'on donne à la courbe à l'origine.
On utilisera plutôt le fait qu'à l'instant **$t = \tau$, $s(t)$ atteint 63% de $A_0.E$**.
C'est donc à partir de l'intersection de la courbe de réponse avec la droite d'équation :
$y(t) = 0.63.A_0.E$ que l'on déterminera la constante de temps d'un système du premier ordre.

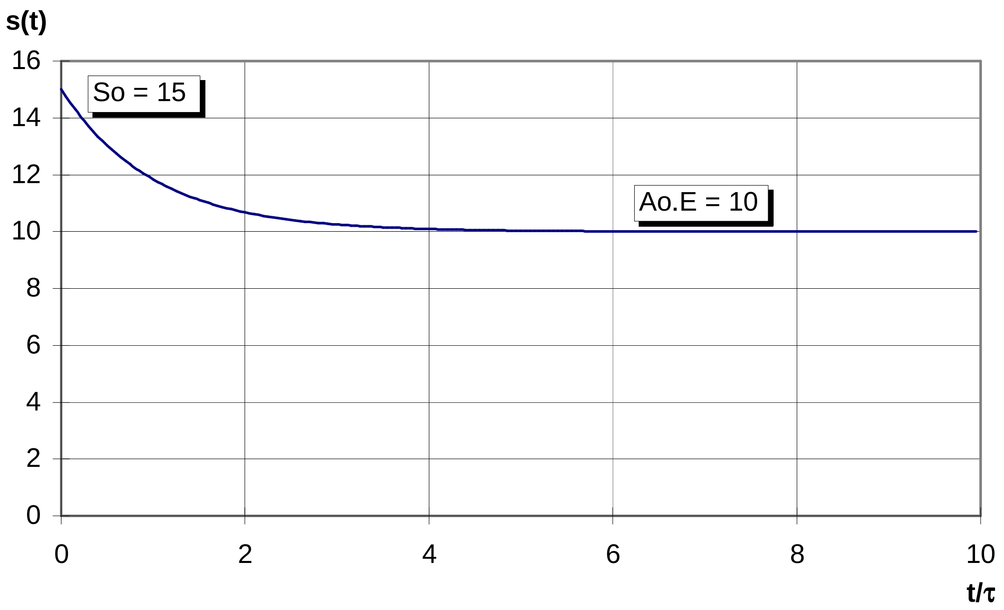
Lorsque les conditions initiales ne sont pas nulles, on doit considérer les 63% de la variation d'amplitude du signal $s(t)$.
Pour l'exemple ci-dessous τ est le temps au bout duquel $s(t)$ atteint la valeur 3 + 0,63.7 = 7,41.



Lorsqu'on observe la réponse d'un système, on peut distinguer deux régimes :

- le **régime transitoire** pendant lequel la **réponse varie**
- le **régime permanent** qui correspond à **sa stabilisation**.

Quelles que soient les conditions initiales, **le régime permanent** d'un système du premier ordre peut être considéré atteint au bout d'un temps **$t = 5.\tau$.**



2.3 Temps de réponse à 5%

On appelle temps de réponse à x % est le temps au bout duquel s(t) parvient à la valeur $A_0.E$ à x% près de la différence $|S_0 - A_0.E|$

Le **temps de réponse à 5% est le plus utilisé.**

Dans le deuxième cas ci-dessus on écrira :

$$A_0.E + (S_0 - A_0.E).e^{-t/\tau} = A_0.E + 0{,}05.(S_0 - A_0.E)$$

dans le troisième cas :

$$A_0.E + (S_0 - A_0.E).e^{-t/\tau} = A_0.E - 0{,}05.(A_0.E - S_0)$$

(le premier cas est un cas particulier des deux précédents avec $S_0 = 0$)

dans tous les cas on aura : $e^{-t/\tau} = 5.10^{-2}$ soit : $\boxed{\mathbf{t_{r5\%} = 3\tau}}$

On montre de la même manière que le temps de réponse à 1% est atteint au bout de 4,6.τ. A t = 5.τ, le système se trouve donc à moins de 1% de son régime permanent.

2.4 Temps de montée

Le temps de montée est le temps qui s'écoule entre 10% et 90% de la variation du signal.

Soient t_1 et t_2 les instants où la réponse vaut respectivement 10% et 90% de sa valeur finale.

$$A_0.E.(1 - e^{-t1/\tau}) = 0{,}1\,A_0.E \Rightarrow t_1 = -\tau.Ln(0{,}9)$$

$$A_0.E.(1 - e^{-t1/\tau}) = 0{,}9.\,A_0.E \Rightarrow t_1 = -\tau.Ln(0{,}1)$$

$$\text{donc : } t_m = t_2 - t_1 = \tau.Ln(9) = 2{,}2.\,\tau$$

$$\boxed{\mathbf{t_m = 2{,}2.\tau}}$$

3. REPONSE HARMONIQUE

L'excitation e(t) est alors sinusoïdale :
$e(t) = E.\sin(\omega t)$

3.1 Fonction de transfert

Elle peut être calculer de deux manières :

- en calculant le rapport $\underline{S}/\underline{E}$ des grandeurs complexes associées aux valeurs de e(t) et s(t)
- en reprenant l'équation différentielle du système et en passant à la notation complexe

De cette façon et en associant à une dérivée par rapport au temps un produit par $j\omega$, on obtient à partir de l'équation différentielle du premier paragraphe :

$j\omega\tau\underline{S} + \underline{S} = A_0.\underline{E}$ d' où la fonction de transfert :

$$\underline{T} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{A_0}{1 + j\omega\tau} = \frac{A_0}{1 + j\omega/\omega_0}$$

ω_0 étant la **pulsation propre** du système.

Son **module** a pour expression : $\boxed{|\underline{T}| = \dfrac{|A_0|}{\sqrt{1 + \omega^2/\omega_0^2}}}$

et son **argument** : $\boxed{\varphi = -\arctan(\omega/\omega_0) \text{ si } A_0 > 0\ , \quad \varphi = \pi - \arctan(\omega/\omega_0) \text{ si } A_0 < 0}$

3.2 Asymptotes

- si **$\omega << \omega_0$** : $\underline{T} = A_0$ donc $G = 20.\log|A_0|$ **l'asymptote est horizontale**.

  $\varphi = 0$ si $A_0 > 0$, $\varphi = \pi$ si $A_0 < 0$

- si **$\omega >> \omega_0$** : $\underline{T} = \dfrac{A_0}{j\omega/\omega_0}$ donc $G = 20.\log|A_0|.\omega_0 - 20.\log\omega$

  en coordonnées semi-logarithmiques cela correspond à une **asymptote oblique** de **pente** égale à **-20 dB/décade.**

  $\varphi = -\pi/2$ si $A_0 > 0$, $\varphi = \pi/2$ si $A_0 < 0$

Les **asymptotes se coupent en $\omega = \omega_0$**, pulsation obtenue en identifiant leurs équations.

3.3 Pulsation de coupure à - 3dB

C'est la pulsation ω_C pour laquelle le module de la fonction de transfert est égal au quotient de sa valeur maximale par $\sqrt{2}$.

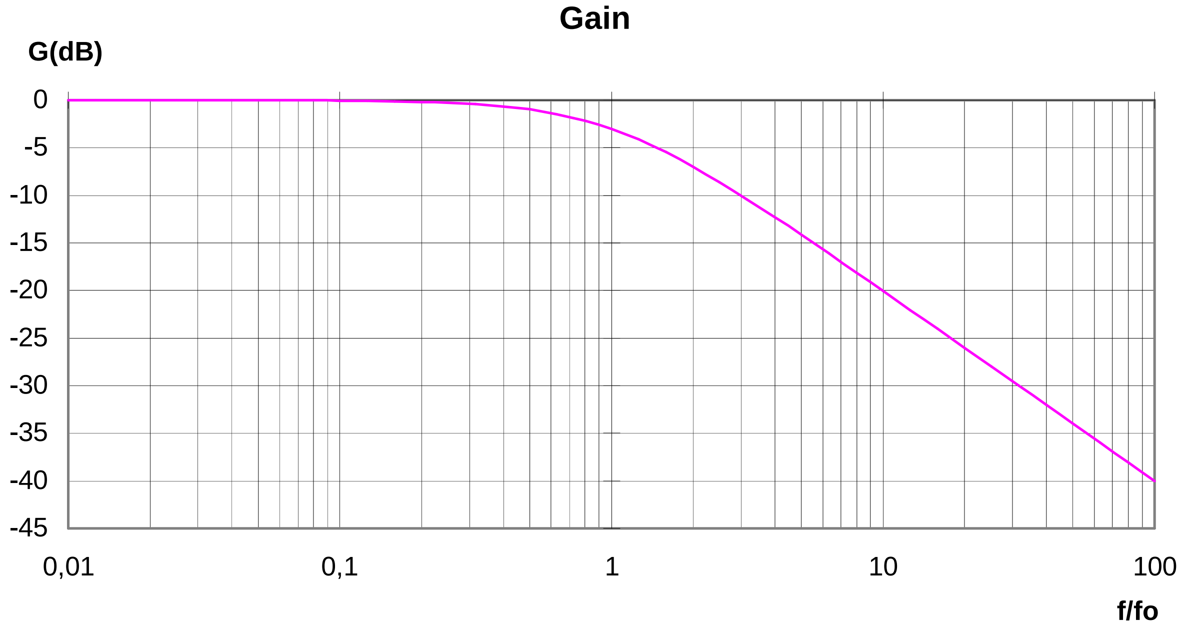
$\boxed{|\underline{T}| = \dfrac{|A_0|}{\sqrt{1 + \omega_c^2/\omega_0^2}} = \dfrac{|A_0|}{\sqrt{2}}}$ donc $\omega_C = \omega_0$

La **pulsation de coupure à - 3 dB, ω_C** est donc **égale** à la **pulsation propre ω_0** du système du premier ordre.

A cette pulsation : **$\varphi = -\pi/4$ si $A_0 > 0$**, **$\varphi = 3\pi/4$ si $A_0 < 0$**

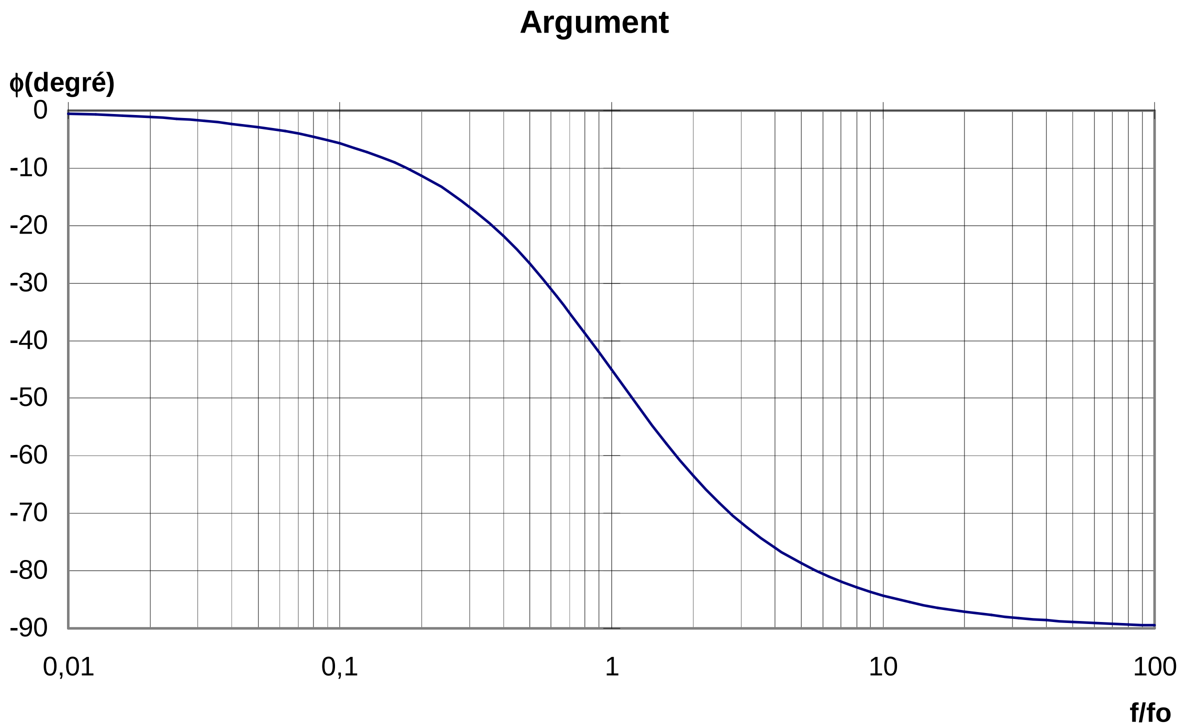
3.4 Diagrammes de Bode

Les diagrammes de Bode sont représentés ci-dessous pour $A_0 = 1$.



La différence entre le diagramme réel et le diagramme asymptotique est de :

- 3 dB à $f = f_0$
- 1 dB à $f = f_0/2$ et à $f = 2.f_0$.



La différence de phase est de -45° à la fréquence $f = f_0$.

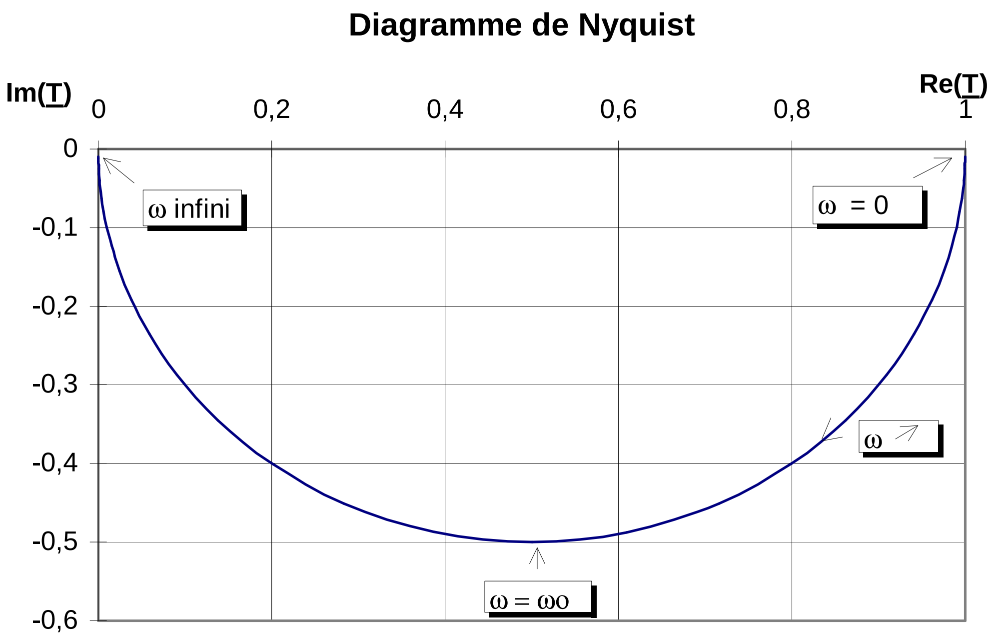
3.5 Relation entre temps de montée et fréquence de coupure

La constante de temps d'un système du premier ordre étant l'inverse de sa pulsation de coupure ω_C à -3 dB, le temps de montée d'un système du premier ordre est donc lié à la fréquence de coupure f_C par la relation :

$$t_m = 2{,}2.\tau = \frac{2{,}2}{\omega_c} = \frac{2{,}2}{2\pi f_c} \qquad \boxed{\mathbf{t_m = 0{,}35/f_c.}}$$

4. DIAGRAMME DE NYQUIST

Le diagramme de Nyquist s'obtient en traçant dans le plan complexe la courbe d'affixe $\underline{T}(\omega)$ lorsque la pulsation ω (ou la fréquence f) varie entre zéro et l'infini. On montre qu'il s'agit d'un demi-cercle.



La courbe peut être obtenue théoriquement à partir des expressions des parties réelle et imaginaire de la fonction de transfert :

$$\underline{T} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{A_0}{1 + j\omega/\omega_0} = A_0 \frac{1 - j\omega/\omega_0}{1 + \omega^2/\omega_0^2}$$

Donc :

$$\mathrm{Re}(\underline{T}) = \frac{A_0}{1 + \omega^2/\omega_0^2} \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(\underline{T}) = -\frac{A_0.\omega/\omega_0}{1 + \omega^2/\omega_0^2}$$

Elle peut également faire l'objet d'un relevé expérimental. Si les grandeurs d'entrée et de sortie sont des tensions, on mesurera leurs amplitudes (ou leurs valeurs efficaces) et leur déphasage pour différentes fréquences. Le rapport des amplitudes fournira le module et le déphasage, l'argument de la fonction de transfert.