

## FILTRES PASSIFS

Un filtre limite le spectre du signal qui le traverse; on distingue quatre types de filtres :

- passe-bas
- passe-haut
- passe-bande
- coupe-bande.

On caractérise un filtre par sa fonction de transfert :

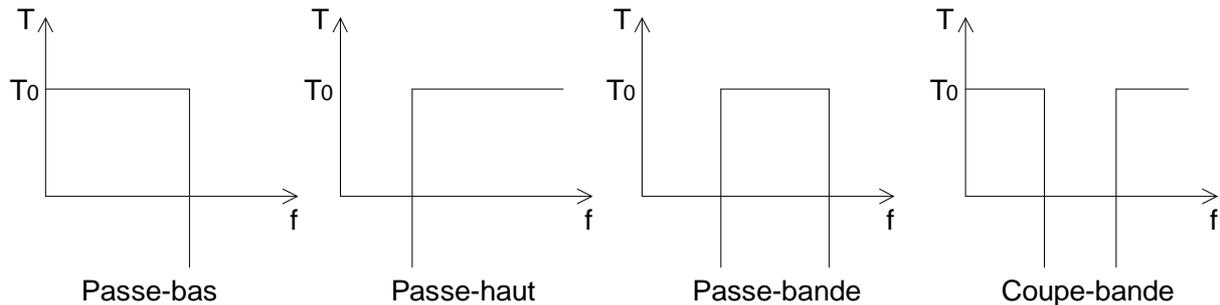
$$\underline{T} = \underline{V}_s / \underline{V}_e$$

$\underline{V}_e$  : amplitude complexe de la tension d'entrée d'un signal sinusoïdal

$\underline{V}_s$  : amplitude complexe de la tension de sortie

On appellera  $T$  le module de  $\underline{T}$  et  $\varphi$  son argument.

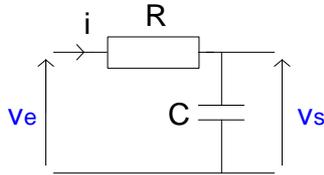
$T$  est représenté ci-dessous pour les quatre types de filtres idéaux.



### 1. FILTRE PASSE-BAS DU PREMIER ORDRE

#### 1.1 Fonction de transfert

On choisit par exemple un circuit RC.



Ecrivons l'équation différentielle liant la tension  $v_s$  à la tension  $v_e$ , lorsque celle-ci est une fonction quelconque du temps :

$$v_e = R \cdot i + v_s \quad \text{avec} \quad i = C \cdot dv_s / dt \quad \text{donc} \quad v_e = R \cdot C \cdot dv_s / dt + v_s$$

Les tensions d'entrée et de sortie sont liées par une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants, d'où le nom de filtre du premier ordre.

Intéressons nous maintenant au régime sinusoïdal et calculons la fonction de transfert de ce filtre :

$$\underline{T} = \frac{\underline{Z}_C}{R + \underline{Z}_C} = \frac{1}{1 + R \cdot \underline{Y}_C} = \frac{1}{1 + jRC\omega} = \frac{1}{1 + j\omega / \omega_0}$$

avec  $\omega_0 = 1/RC$  : **pulsation propre du filtre.**

$$\underline{T} = \frac{T_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

représente la **forme canonique** de la fonction de transfert d'un filtre passe-bas du premier ordre. Ici  $T_0 = 1$  et  $\omega_0 = 1/(RC)$

Le **gain G** est défini par :  $G = 20 \cdot \log |\underline{T}|$

**unité décibel (dB)**

## 1.2 Etude de T, G et $\varphi$ en fonction de la fréquence f

### 1.2.1 Etude aux limites

$$T = \frac{|T_0|}{\sqrt{1 + \frac{f^2}{f_0^2}}}$$

$$G = 20 \cdot \log(T) = G_0 - 10 \cdot \log(1 + f^2 / f_0^2)$$

$$\text{avec } G_0 = 20 \cdot \log |T_0|$$

$$\varphi = -\text{Arctan}(f/f_0)$$

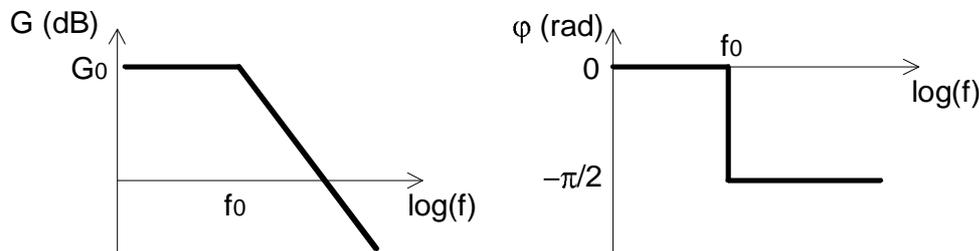
|                        |                       |                         |                              |
|------------------------|-----------------------|-------------------------|------------------------------|
| $f \rightarrow 0$      | $T \rightarrow  T_0 $ | $G \rightarrow G_0$     | $\varphi \rightarrow 0$      |
| $f \rightarrow \infty$ | $T \rightarrow 0$     | $G \rightarrow -\infty$ | $\varphi \rightarrow -\pi/2$ |
| $f = f_0$              | $T =  T_0 /\sqrt{2}$  | $G = G_0 - 3\text{dB}$  | $\varphi = -\pi/4$           |

La fréquence  $f_0$  pour laquelle  $G = G_{\max} - 3\text{dB}$  est appelée fréquence de coupure à  $-3\text{dB}$  du filtre.

### 1.2.2 Asymptotes

- $f \ll f_0$      $T \rightarrow |T_0|$                        $G \rightarrow G_0$   
donc :  $G = G_0$  est une asymptote horizontale
- $f \gg f_0$      $T \rightarrow |T_0| \cdot f_0/f$      $G \rightarrow G_0 - 20 \log(f/f_0) = -20 \cdot \log(f) + 20 \cdot \log(f_0) + G_0$   
donc si l'on utilise une échelle des abscisses logarithmique, on aura pour  $f \gg f_0$ , une droite asymptotique de pente  $-20\text{dB/dec}$ .
- Point de concours des asymptotes :  $-20 \cdot \log(f/f_0) = 0$  ; les asymptotes se coupent donc en  $f = f_0$
- $f \ll f_0$                        $\varphi \rightarrow 0$
- $f \gg f_0$                        $\varphi \rightarrow -\pi/2$

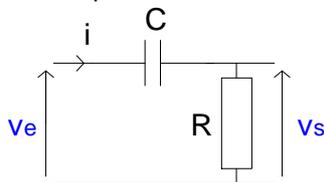
D'où les diagrammes asymptotiques de Bode  $G(f)$  et  $\varphi(f)$  :



## 2. FILTRE PASSE-HAUT DU PREMIER ORDRE

### 2.1 Fonction de transfert

L'exemple choisi est celui d'un circuit CR.



$$\underline{T} = \frac{R}{R + \underline{Z}_C} = \frac{1}{1 + \underline{Z}_C / R} = \frac{1}{1 - j / RC\omega} = \frac{1}{1 - j\omega_0 / \omega}$$

Ceci est une expression de  $\underline{T}$  mais ce n'est pas sa forme canonique ; sous sa forme canonique, le dénominateur doit être le même que pour un filtre passe-bas. On l'obtient en multipliant le numérateur et le dénominateur de la fonction de transfert par  $\underline{Y}_C$ .

$$\underline{T} = \frac{R \cdot \underline{Y}_C}{1 + R \cdot \underline{Y}_C} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} = \frac{j\omega / \omega_0}{1 + j\omega / \omega_0}$$

$$\underline{T} = \frac{T_0 \cdot j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}$$

est la **forme canonique** de la fonction de transfert d'un **filtre passe-haut du premier ordre**.

Ici  $T_0 = 1$  et  $\omega_0 = 1/(RC)$

## 2.2 Etude de T, G et $\varphi$ en fonction de la fréquence f

### 2.2.1 Etude aux limites

$$T = \frac{|T_0|}{\sqrt{1 + \frac{f_0^2}{f^2}}} \quad G = 20 \cdot \log(T) = G_0 - 10 \cdot \log(1 + f_0^2 / f^2)$$

$$\varphi = \pi/2 - \text{Arctan}(f/f_0)$$

|                        |                       |                         |                             |
|------------------------|-----------------------|-------------------------|-----------------------------|
| $f \rightarrow 0$      | $T \rightarrow 0$     | $G \rightarrow -\infty$ | $\varphi \rightarrow \pi/2$ |
| $f \rightarrow \infty$ | $T \rightarrow  T_0 $ | $G \rightarrow G_0$     | $\varphi \rightarrow 0$     |
| $f = f_0$              | $T =  T_0 /\sqrt{2}$  | $G = G_0 - 3\text{dB}$  | $\varphi = \pi/4$           |

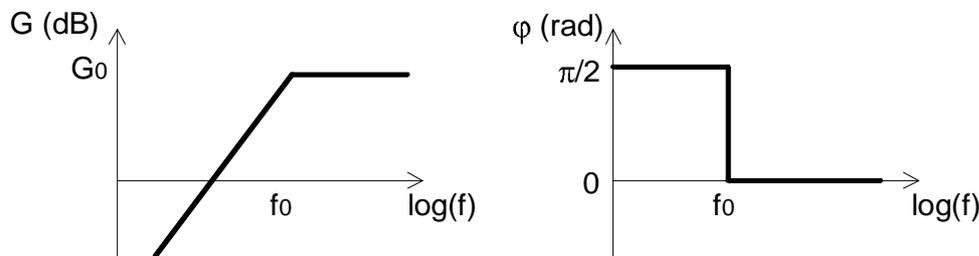
### 2.2.2 Asymptotes

- $f \ll f_0$      $T \rightarrow |T_0| \cdot f/f_0$      $G \rightarrow G_0 + 20 \log(f/f_0) = 20 \log(f) + G_0 - 20 \cdot \log(f_0)$
- $f \gg f_0$      $T \rightarrow |T_0|$      $G \rightarrow G_0$

Nous avons donc une asymptote horizontale pour  $f \gg f_0$  et une asymptote oblique de pente +20dB/dec, lorsque  $f \ll f_0$ . Elles concourent en  $f = f_0$ .

- $f \ll f_0$      $\varphi \rightarrow \pi/2$
- $f \gg f_0$      $\varphi \rightarrow 0$

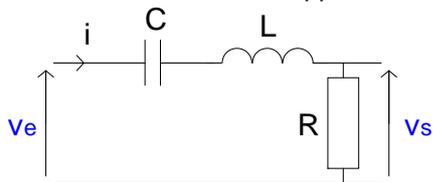
D'où les diagrammes asymptotiques de Bode  $G(f)$  et  $\varphi(f)$  :



## 3. FILTRE PASSE-BANDE

### 3.1 Fonction de transfert

Un circuit RLC sert de support à cette étude :



$$\underline{T} = \frac{R}{R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C} = \frac{R \cdot \underline{Y}_C}{R \cdot \underline{Y}_C + \underline{Y}_C \cdot \underline{Z}_L + 1} = \frac{jRC\omega}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

qui peut être mis sous sa forme canonique :

$$\underline{T} = \frac{T_0 \cdot 2jm \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 2jm \frac{\omega}{\omega_0}}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad m = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

$T_0$  est ici égal à l'unité.

mais on préfère souvent la mettre sous une forme plus facile à exploiter, en divisant numérateur et dénominateur par  $2jm\omega/\omega_0$  et en utilisant le facteur de qualité  $Q = 1/(2m)$  :

$$\underline{T} = \frac{T_0}{1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} = \frac{T_0}{1 + jQ \left( \frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right)}$$

### 3.2 Etude de T, G et $\varphi$ en fonction de la fréquence f

#### 3.2.1 Etude aux limites

$$T = \frac{|T_0|}{\sqrt{1 + Q^2 \left( \frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right)^2}} \quad \varphi = -\text{Arctan} \left( \frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right)$$

|                        |                   |                         |                              |
|------------------------|-------------------|-------------------------|------------------------------|
| $f \rightarrow 0$      | $T \rightarrow 0$ | $G \rightarrow -\infty$ | $\varphi \rightarrow \pi/2$  |
| $f \rightarrow \infty$ | $T \rightarrow 0$ | $G \rightarrow -\infty$ | $\varphi \rightarrow -\pi/2$ |
| $f = f_0$              | $T =  T_0 $       | $G = G_0$               | $\varphi = 0$                |

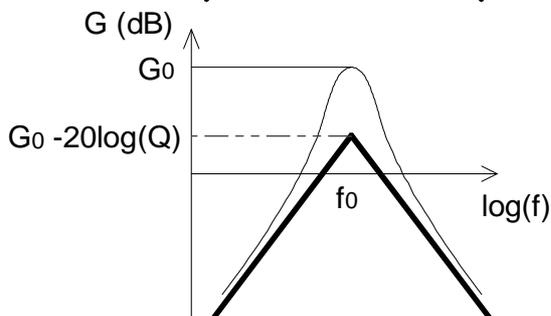
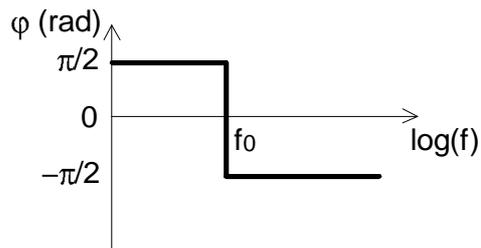
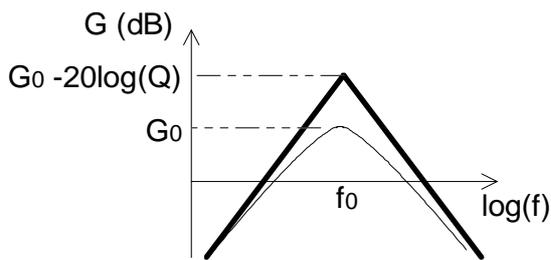
T présente un maximum pour  $f = f_0$ .

#### 3.2.2 Asymptotes

- $f \ll f_0$      $T \rightarrow |T_0| \cdot f / (f_0 \cdot Q)$
- $f \gg f_0$      $T \rightarrow |T_0| \cdot f_0 / (Q \cdot f)$

$$G \rightarrow 20 \log(f) + 20 \log(|T_0|/Q) - 20 \cdot \log(f_0)$$

$$G \rightarrow -20 \log(f) + 20 \log(|T_0|/Q) + 20 \cdot \log(f_0)$$



Nous avons donc deux asymptotes obliques de pente  $+20\text{dB/dec}$ , pour  $f \ll f_0$ , et de pente  $-20\text{dB/dec}$ , pour  $f \gg f_0$ .

Ces deux asymptotes concourent en  $f = f_0$ , fréquence pour laquelle  $G = 20\log(|T_0|/Q)$

A la fréquence  $f_0$ ,  $G = 20\log(|T_0|)$  ; la courbe de gain se trouve donc :

- au dessus du point de concours des asymptotes si  $Q < 1$
- en dessous du point de concours des asymptotes si  $Q > 1$
- passe par le point de concours des asymptotes si  $Q = 1$

### 3.2.3 Fréquences de coupure et bande passante à -3dB

Aux fréquences de coupure :

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{2}} \text{ donc : } Q^2 \left( \frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right)^2 = 1$$

$$\text{soit } Q \left( \frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right) = \pm 1$$

Seules les solutions positives de cette équation du second degré sont physiquement acceptables :

$$f_{cb} = \frac{f_0}{2Q} (-1 + \sqrt{1 + 4Q^2})$$

$$f_{ch} = \frac{f_0}{2Q} (1 + \sqrt{1 + 4Q^2})$$

la bande passante BP a pour expression : **BP =  $f_{ch} - f_{cb} = f_0/Q$**

Elle est d'autant plus étroite que le coefficient de qualité Q est élevé.

### 3.3 Filtre sélectif

C'est un filtre passe-bande à bande passante très faible devant  $f_0$ .

L'expression de  $\underline{T}$  alors être simplifiée :

$$\underline{T} = \frac{T_0}{1 + jQ \left( \frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right)} = \frac{T_0}{1 + jQ \left( \frac{f^2 - f_0^2}{f \cdot f_0} \right)} = \frac{T_0}{1 + jQ \left( \frac{(f - f_0) \cdot (f + f_0)}{f \cdot f_0} \right)} \approx \frac{T_0}{1 + jQ \left( \frac{(f - f_0) \cdot 2f_0}{f_0^2} \right)}$$

$$\underline{T} \approx \frac{T_0}{1 + j2Q \left( \frac{f - f_0}{f_0} \right)} = \frac{T_0}{1 + j2Q \left( \frac{\Delta f}{f_0} \right)}$$

Les fréquences de coupure à -3 dB sont alors données par  $2Q \cdot \Delta f / f_0 = \pm 1$ , donc :

$$\mathbf{f_{cb} = f_0 \cdot (1 - 1/2Q)} \quad \mathbf{f_{ch} = f_0 \cdot (1 + 1/2Q)}$$

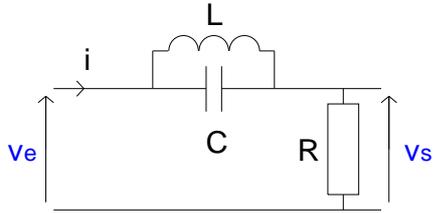
Ces fréquences auraient pu être obtenues en faisant un développement limité au premier ordre des expressions précédentes (3.2.2.), en considérant  $Q \gg 1$  (approximation de la bande étroite).

La bande passante BP a la même expression que sans approximation : **BP =  $f_{ch} - f_{cb} = f_0/Q$**

## 4. FILTRE COUPE-BANDE

### 4.1 Fonction de transfert

Le circuit étudié comporte un circuit bouchon LC :



En négligeant les pertes de la bobine et du condensateur :

$$\underline{T} = \frac{R}{R + \underline{Z}} = \frac{\underline{Y}}{\underline{Y} + 1/R} = \frac{j(C\omega - 1/L\omega)}{j(C\omega - 1/L\omega) + 1/R} = \frac{1 - LC\omega^2}{1 - LC\omega^2 + jL\omega/R}$$

$$\underline{T} = \frac{T_0 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 2jm \frac{\omega}{\omega_0}}$$

représente la **forme canonique** de la fonction de transfert d'un **filtre coupe-bande** du premier ordre.

$$\text{Ici : } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad m = \frac{1}{2R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad T_0 = 1$$

### 4.2 Etude de T, G et $\varphi$ en fonction de la fréquence f

$$T = \frac{|T_0| \cdot \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2m \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

$$\varphi = \text{Arg}(1 - \omega^2/\omega_0^2) - \text{Arg}(1 - \omega^2/\omega_0^2 + 2jm\omega/\omega_0)$$

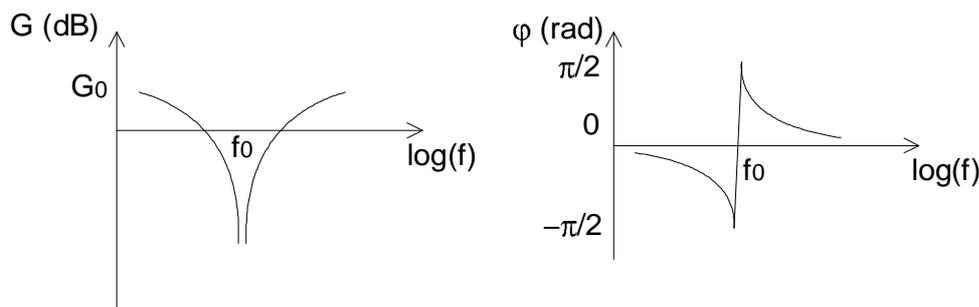
$$\omega \rightarrow 0 \quad T \rightarrow |T_0| \quad G \rightarrow G_0 \quad \varphi \rightarrow 0$$

$$\omega \rightarrow \infty \quad T \rightarrow |T_0| \quad G \rightarrow G_0 \quad \varphi \rightarrow 0$$

$$\omega \rightarrow \omega_0 \quad T \rightarrow 0 \quad G \rightarrow -\infty \quad \varphi \rightarrow \pm \pi/2 \quad (-\pi/2 \text{ si } \omega < \omega_0, +\pi/2 \text{ si } \omega > \omega_0)$$

On remarque qu'à  $\omega = \omega_0$ , le signal n'est pas transmis, l'argument présentant une variation de  $\pi$  radian à cette pulsation. Le filtre est d'autant plus étroit que le coefficient d'amortissement est faible.

En réalité les pertes, particulièrement de la bobine, font que le signal à la pulsation  $\omega_0$  n'est pas totalement rejeté mais seulement plus au moins atténué.



#### 4.2.1 Fréquences de coupure à -3dB

Elles sont définies par  $T = |T_0|/\sqrt{2}$ , soit :

$$2 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(2m \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$$

$$1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} = \pm 2m \frac{\omega}{\omega_0}$$

d'où l'expression des deux pulsations de coupure basse et haute :

$$\omega_{cb} = -m \cdot \omega_0 + \omega_0 \sqrt{1 + m^2}$$

$$\omega_{ch} = m \cdot \omega_0 + \omega_0 \sqrt{1 + m^2}$$

#### 4.2.2 Bande rejetée à -3dB

C'est la différence entre les fréquences de coupure haute et basse :

$$\Delta f = f_{ch} - f_{cb} = 2m \cdot f_0$$